Distributions aléatoires et Filtrations.

Pierre Jalinière

22 Juillet 2008

1 Introduction

La plupart des phénomènes physiques comme économiques ne sont accessibles qu'à travers leurs actions sur des classes d'instruments de mesures. Instruments de mesures eux-même soumis aux aléas dû aux informations partielles dont on dispose à leurs égards. Les résultats qu'ils induisent étant eux même sujet à l'aléa et par là non déterministe. C'est le point de vue "heuristique" ou pratique qui apparait à l'étude des distributions aléatoires. Il s'agit d'étudier des familles d'opérateurs linéaires à valeur dans l'espace des variables aléatoires. En généralisant la définition donné par Gelfand on peut ajouter de l'aléa via les familles de fonctions tests. Ce moyen permet d'étudier le comportement des phénomènes en fonction du taux d'information dont on dispose. On en déduit des résultats simples sur le comportement analytique des processus en fonction du type de classe d'information sur lequel elles existent. Un calcul différentiel et des décompositions de type Levy-Itô s'en déduise. Nous étaierons cet exposé à l'aide d'exemples simples venus du calcul stochastique et de l'étude des marchés.

2 Fonctions tests et Filtrations

On attend d'un espace de fonction test qu'il soit suffisamment grand pour permettre un calcul différentiel munis d'aléa et surtout assez petit pour permettre l'existence d'une classe de distribution la plus grande possible. Enfin l'on souhaite la complétude d'un tel espace ainsi l'on définit :

définition 1 *On appelle et l'on note $\mathcal{C} = \mathcal{C}_c^\infty(E)\hat{\otimes}L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des fonctions tests aléatoires indexé par E où E est un espace polonais munis d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension finis sur $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{C}_c^\infty(E)$ l'espaces des fonctions infiniments différentiables à support compact sur E et $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bornées presque-sûrement sur cet espace.*

Remarquons qu'en général l'on n'a pas $\mathcal{C}$ identique à l'espace des processus infiniments différentiables à support compact presque-sûrement et presque-sûrement en tout x bornée sur Ω. Ici, nous avons de plus l'existence d'un support indépendant de tout aléa : On peut définir $Supp\phi$ pour $\phi \in \mathcal{C}$ comme un compact déterministe de E. C'est la raison pour laquelle on fait appel au complété du produit tensoriel présent dans la définition.

proposition 1 *Par définition $\mathcal{C}$ est complet. Tout processus de $\mathcal{C}$ admet des différentielle de tous ordres, définies ω par ω. La topologie sur $\mathcal{C}$ est celle définie par les semi-normes $\| \partial^\alpha f \|_\infty$ où ici la norme infini est prise sur $E \times \Omega$. Enfin l'on a $\mathcal{C}$ dense dans $L^p(E \times \Omega)$ pour tout $p \geqslant 1$.*

Preuve :
En effet pour tout p toute fonction de $L^p(E \times \Omega)$, $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}$-mesurables pour $dxdP$ peut s'approcher pour la norme associée par une suite de fonction de la forme $\sum \alpha_i \mathbb{1}_{U_i} \mathbb{1}_{A_i}$ où U_i est un ouvert bornée de E, espace polonais, A_i un élément de $\mathcal{F}$ et α_i telle que $\sum \alpha_i^p < \infty$. E est séparable mesurable il existe donc une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(E)$ qui tends vers $\mathbb{1}_{U_i}$ pour tout i pour la norme infini. En extrayant une suite de la famille des précédentes et en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient bien la densité voulue.

définition 2 *Une topologie $\mathcal{U}$ sur $(E, \mathcal{T})$ espace topologique est dite adaptée vis à vis de $\mathcal{T}$ si et seulement si elle vérifie les axiomes suivants :*
1. $\mathcal{U}$ est moins fine que $\mathcal{T}$.
2. L'adhérence de tout point de E est d'intérieur non vide pour $\mathcal{U}$.
3. A Tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ on peut associer un plus petit ouvert $\tilde{U} \in \mathcal{U}$ contenant U.

Il s'agit donc d'une topologie suffisamment grossière sur E pour permettre à chaque point de posseder un plus petit "sous-voisinage" mais assez fine pour qu'à tout ouvert de la topologie de départ il soit possible d'associer un voisinage minimal. On vérifie facilement qu'ainsi sur $\mathbb{R}^+$ La topologie de fermé des demi-droites est adaptée vis à vis de celle naturelle générée par les intervalles.
C'est cette topologie qui permet de définir la notion de filtration stochastique, en effet :

définition 3 *Soit (Ω, F) un espace de probabilité, une filtration stochastique $\mathcal{F}$ sur Ω est la donnée d'un foncteur $\mathcal{F}$ défini sur les fermés d'une topologie $\mathcal{U}$, à valeur dans les sous-tribus de F sur Ω, et telle que pour toute famille $\{F_i\}_{i \in I}$ de fermé de $(E, \mathcal{U})$ l'on ait :*

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_{F_i} = \mathcal{F}_{\bigcup_{i \in I} F_i}$$

Et :

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{F_i} = \mathcal{F}_{\bigcap_{i \in I} F_i}.$$

Soit à présent $(E, \mathcal{T}, \mathcal{U})$ Un espace topologique munis d'une topologie $\mathcal{U}$ adaptée, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{U})$ une filtration stochastique.
On dit qu'un processus f définit sur $E \times \Omega$ est adapté à $\mathcal{F}$ si et seulement si sa restriction à $F \times \Omega$ pour tout F fermé de $\mathcal{U}$ est $\mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{F}_F$-mesurable.

Remarquons que pour qu'un processus soit adapté au sens de ci-dessus il suffit qu'il le soit pour une base de fermé de $\mathcal{U}$. De plus il est clair que si f, adapté, est différentiable à différentielle continue ω par ω sa différentielle est elle aussi adaptée et l'on a :

proposition 2 *L'espace $\mathcal{C}_{ad}(\mathcal{F})$ formé des processus appartenant à $\mathcal{C}$ et adapté vis à vis de $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{C}$ et est dense pour les normes p dans les espaces de fonctions L^p adaptés associés.*

Preuve :
Montrons tout d'abord que $\mathcal{C}_{ad}(\mathcal{F})$ est bien fermé dans $\mathcal{C}$. En effet, si f est limite d'une suite de fonctions adaptées dans $\mathcal{C}$ alors ses restrictions à tout fermé F de $\mathcal{T}$ sont limites dans L^2 des suites restreintes aux mêmes ouverts. Chacune d'elles est $\mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{F}_F$-mesurable il en est donc de même de leur limite.
Le second point se déduit par régularisation. En effet si $f \in L^p_{ad}(\mathcal{F})$ f, pour presque tout ω est

élément de $L^p_{loc}(E)$. Soit à présent h déterministe, infiniment différentiable, de support inclus dans $B_0(0,1)$. Presque-sûrement si l'on note F_x l'adhérence x pour $\mathcal{T}$ pour la norme L^p de E on a :

$$f_n(x) = \int_{F_x} \frac{1}{\lambda(F_x \cap B_0(0,1/n))} h(\frac{x-y}{n}) f(y) dy$$

Où λ est la mesure de Lebesgue sur E qui converge vers f. Le fait est clair pour f continue à ω fixé et se déduit dans le cas général de l'inégalité de Hölder et de la densité pour ω fixé des fonctions continues bornées dans L^p. Ainsi définit on vérifie que pour tout n la suite f_n est adaptée et, en développant f sur $\mathcal{C}_c^\infty \otimes L^\infty$, bien dans $\mathcal{C}$. Le théorème de convergence dominé appliqué sur Ω conclut alors la preuve.
Remarque : Si $f \in \mathcal{C}_{ad}$, $f_n \to f$ dans cette espace : Comme dans le cas déterministe la régularisation est compatible avec la topologie des espaces sur laquelle elle se fait.
Définissons à présent les notions de distributions associés.

3 L'espace des distributions.

définition 4 *On définit sur $\mathcal{C}(U \times \Omega, \mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω l'espace $\mathcal{D}(U \times \Omega, \mathcal{F})$ comme l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{C}(U \times \Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ espace des variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurable munis de la topologie associé à la convergence presque-sûre.*

Avant d'aller plus avant dans l'étude des distributions aléatoires assurons nous qu'elles contiennent une classe suffisament grande de processus. C'est l'objet de la proposition suivante.

proposition 3 *Il existe une injection naturelle continue de l'espace des processus presque-sûrement $L^1_{loc}(E)$ dans $\mathcal{D}$ et si f est un tel processus cette injection est définit par l'application qui à f associe l'opérateur :*

$$\phi \longmapsto \int_E f\phi$$

Preuve :
Ici, l'espace des processus presque-sûrement L^1_{loc} est munis de sa topologie naturelle i.e. une suite f_n de cet espace converge vers f si et seulement si pour tout compact K de E on a presque-sûrement $\int_K \mid f_n - f \mid$ qui tends vers 0. L'injection décrite ci-dessus est alors continue pour la topologie duale faible des espaces de distribution considérés. En effet , soit ϕ une fonction test, à ω fixé elle admet presque sûrement un support compact K et si f_n tend vers f on a $\mid \int_E (f_n - f)\phi \mid \leq \int_K \mid f_n - f \mid\mid\mid \phi \mid\mid_\infty$ qui tends bien vers 0. Reste à montrer que l'application ainsi défini est injective. Mais si f est presque sûrement L^1_{loc} alors pour K fixé ω presque-sûrement la suite $\int_E f(x,\omega) n^d h(\frac{y-x}{n}) dx$ converge vers f. Or par hypothèse ($h \in \mathcal{C}$) chaque terme de cette suite est nulle. Il en est donc de même pour f.

On déduit de cette proposition que la plupart des processus utiles en calcul stochastique sont représentables en terme de distribution. Les résultats ayant trait à ces objets seront donc directement appliquable au processus voulu. Remarquons entre autre que tout processus càdlàg ou bien $L^2(E \times \Omega)$ admet un unique représentant distribution.
Nous allons à présent définir différent type de sous-espace de $\mathcal{D}$ qui généralisent les types de processus utiles en calcul stochastique. Pour se faire commençons par définir une notion d'adaptabilité propre au distribution. Dans la suite, si $\mathcal{F}$ est une filtration adaptée à E, on note par abus $\mathcal{F}_U$ la tribu définit sur Ω par $\mathcal{F}_{\bar{U}}$ où $\bar{U}$ est l'adhérence pour la topologie du filtre de U. On a alors :

définition 5 *On définit et l'on note $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{F})$ l'espace des distributions adaptées T telles que pour tout U de E, T restreint à l'espace $\mathcal{C}_{ad}(U)$ soit à valeur dans l'espace $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}_U)$*

Remarquons que via l'injection naturelle décrite un peu plus haut tout processus presque-sûrement L^1_{loc} adapté est une distribution adaptée et que réciproquement toute distribution adaptée presque-sûrement L^1_{loc} est un processus adapté (la suite régularisante étant déterministe elle appartient pour toute filtration à $\mathcal{C}_{ad}$). De plus on vérifie facilement que l'espace $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{F})$ est un fermé de $\mathcal{D}$ pour la tribu $\mathcal{F}_E$ où la topologie sur $\mathcal{D}$ est celle de la convergence point par point. Enfin, l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{D}$ laisse évidemment stable $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{F})$.
Comme dans le cas déterministe on peut définir le produit de convolution d'une distribution par un processus de $\mathcal{C}$, convolution dont le résultat donne un processus presque-surement $\mathcal{C}^\infty$ sur E et vérifiant l'identité :

$$\partial^\alpha (T * \phi) = (\partial^\alpha T) * \phi$$

En convoluant par la suite régularisante on montre ainsi que les processus presque-surement $\mathcal{C}^\infty$ sur E (respectivement adaptés) sont dense dans l'espace des distributions (respectivement adaptées). Et l'on déduit de l'identité précédente que l'on a bien T constante si et seulement si toutes ses dérivées partielles du premier ordre sont nulles.
De la même façon que nous avons définit la notion d'aptabilité pour les distributions étendant celle connue pour les processus nous allons à présent étendre celle de conditionnement. Pour se faire commençons par définir la notion d'espace à valeur L^p de distribution.

définition 6 *On définit et l'on note $\mathcal{D}L^p(\mathcal{F})$ espace des distributions L^p comme l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{C}$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F})$.*

Une fois encore cette notion coincide bien avec le caractère L^p sur tout compact et pour un certain ordre des processus en effet :

proposition 4 *Soit f un processus défini sur $E \times \Omega$ et tel que pour tout compact de E il existe $q \geq 1$ tel que $\int_K f^q$ appartiennent à $L^p(\Omega, \mathcal{F})$. Alors f définit une et une seule distribution de $\mathcal{D}L^p$ qui coincide avec son unique représentant dans $\mathcal{D}$ et l'espace de départ ainsi défini s'injecte continuement pour la topologie faible dans $\mathcal{D}L^p$.*

En effet, pour ϕ fonction test fixée l'étude d'une distribution associée à ce type de processus se ramène à son étude sur un compact de K fixé. L'inégalité de Hölder conclut la preuve.

Comme on peut s'y attendre les inclusions probabilistes $L^q \subset L^p$ pour $1 \leq q \leq p$ reste vrai et l'on a sous les mêmes conditions $\mathcal{D}L^q \subset \mathcal{D}L^p$.
De plus, la proposition précédente assure que la plupart des processus en particulier les dérivées du Brownien ou des processus de Levy appartiennent à $\mathcal{D}L^p$ pour tout $p \geqslant 1$: On retrouve ici en particulier la notion de crochet finis propre et si utile au calcul stochastique. De cette définition on déduit celle de conditionnement pour des distributions.
Dans toute la suite on note en s'inspirant du cas déterministe $< T, \phi >$ l'action d'une distribution T sur ϕ fonction test.

définition 7 *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ deux tribus sur Ω et soit T un élément de $\mathcal{D}L^1(\mathcal{G})$. On définit alors $E(T \mid \mathcal{F})$ élément de $\mathcal{D}L^1(\mathcal{F})$ par l'identité pour tout $\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$:*

$$< E(T \mid \mathcal{F}), \phi >= E(< T, \phi >\mid \mathcal{F})$$

L'opérateur de conditionnement ainsi définit est alors bien continue.
De plus, pour $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}$ on peut définir une injection continue canonique de $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ par

l'application qui pour $T \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ associe à tout ϕ de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ l'élément $< T, E(\phi \mid \mathcal{F}) >$. Cette injection identifie $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ à un fermé de $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ et, tout comme pour les processus, le conditionnement sur cet espace coincide avec l'identité. Une distribution est alors dite martingale si et seulement si elle est adaptée et telle que pour tout ouvert U de E l'on ait T_U restriction de la distribution T à l'ouvert U constante conditionnée à l'espace $\mathcal{F}_{U^c}$

remarquons que pour qu'une distribution soit martingale il suffit que l'identité précédente soit vérifié pour tout ouvert de la topologie du filtre. De plus l'espace martingale ainsi défini est un fermé de $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{F})$ enfin, une distribution presque-sûrement L^1_{loc} de $\mathcal{D}L^1$ est martingale si et seulement si elle est comme processus martingale locale. Cette définition du conditionnement par le théorème de Fubini généralise celle définit pour les processus $L^1_{loc}(E)$ presque-surement, $L^1(\Omega)$ presque partout. De plus de même que dans le cas déterministe on peut définir une notion de différentiation pour les distributions en posant $< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^\alpha < T, \partial^\alpha \phi >$ et l'on a dans ce cas :

$$E(\partial^\alpha T \mid \mathcal{F}) = \partial^\alpha E(T \mid \mathcal{F})$$

On en déduit qu'à tous ordres toute dérivée de martingale est martingale et que, dès l'ordre 1 ∂T_U est nulle conditionnée à $\mathcal{F}_{U^c}$.

Supposons à présent deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ munis de la même topologie et tel que pour tout F de celle-ci $\mathcal{F}_F \subset \mathcal{G}_F$ alors on a :

proposition 5 *Tout T de $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{F})$ appartient à $\mathcal{D}_{ad}(\mathcal{G})$ et si T est martingale pour $\mathcal{G}$ il en est de même pour $\mathcal{F}$. De plus d'après l'égalité précédente les différentielles de T sont identiques pour les deux espaces.*

On en déduit le corollaire suivant.

corollaire 1 *Soit A un processus à variation finis sur $[0, T]$ adapté à une filtration $\mathcal{F}$ et α un processus presque-surement localement intégrable sur $]0, T[$ vis à vis de la mesure dA, adapté à une filtration $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{F}$, presque partout $L^1(\Omega)$, et d'espérance intégrable vis à vis de la mesure aléatoire dA et de son espérance alors on a pour tout $t < T$:*

$$E(\int_0^t \alpha_s dA_s \mid \mathcal{F}_t) = \int_0^t E(\alpha_s \mid \mathcal{F}_s) dA_s$$

Preuve :
$\int_0^t \alpha_s dA_s$ est presque-surement $L^1_{loc}(]0, T[)$ et définit donc une distribution sur cet ouvert. Sa différentielle coincide avec $\alpha_t dA_t$ en effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli si $\phi \in \mathcal{C}_{ad}(\mathcal{G})$:

$$-\int_0^T \int_0^t \alpha_s f'(t) dA_s dt = \int_0^T \int_0^T -f'(t) \mathbb{1}_{[0,t]}(s) dt \alpha_s dA_s$$

Or, pour tout ω :

$$-\int_0^T f'(t, \omega) \mathbb{1}_{[s,T]}(t) dt = f(s, \omega)$$

D'après la proposition précédente on en déduit que :

$$dE(\int_0^t \alpha_s dA_s \mid \mathcal{F}_t) = E(\alpha_s dA_s \mid \mathcal{F}_s)$$

Or dA_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et ainsi :

$$dE(\int_0^t \alpha_s dA_s \mid \mathcal{F}_t) = E(\alpha_s \mid \mathcal{F}_s) dA_s$$

Enfin par hypothèse et à nouveaux d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$E(\int_0^t \alpha_s dA_s) = \int_0^t E(\alpha_s dA_s)$$

L'intégrale d'une distribution quand elle existe étant définie à une constante près cela conclu la preuve.
La dérivée au sens des distributions correspond à une version anticipative de la notion de différentielle en ce sens que le produit quand il existe d'une différentielle de distribution martingale avec un processus L^2 par exemple ne définit pas un opérateur martingale. Ainsi si d est l'opérateur de dérivation de Îto, pour un mouvement brownien W sur $\mathbb{R}^+$ on a pour tout t :

$$\int_0^t 2W_s \partial W_s = W_t^2 = \int_0^t 2W_s dW_s + t$$

Pour remedier à ce type de problème nous définissons dans la partie suivante un sous espace de distribution de type "semi-martingale".

4 Distributions Semi-Martingales.

définition 8 *Soit Ω un espace de probabilité et E une variété de même type que précédemment on définit l'espace des processus à variations finis comme l'ensemble des processus A presque-sûrement $L^1_{loc}(E)$ admettant une version telle que pour tout compact de E et toute suite de recouvrement par des ouverts U_i de celui-ci de diamètre tendant uniformément vers 0 l'on ait :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in U_i} \mid A_x - A_y \mid < +\infty$$

Par la suite on note $v(A)$ cette limite. On dit qu'une suite A_n de processus de ce type converge vers A si et seulement si $v(A_n - A) \to 0$ avec A_n convergeant vers A au sens des distributions. L'espace des distributions à variations finis sur E noté $\mathcal{V}$ est alors le completé pour cette topologie de l'espace des processus presque-sûrement L^1_{loc}. Il s'injecte continuement dans l'espace des distributions et possède comme précédemment des versions adaptées et $\mathcal{D}L^p$ notés respectivement $\mathcal{V}_{ad}$ et $\mathcal{V}L^p$ où l'on demande dans un cas l'adaptabilité des processus et dans l'autre aux variations de cauchy associées $v(D_{n+p} - D_n)$ de converger dans L^p.

Pour prouver que cette définition a un sens il est nécessaire de s'assurer que la topologie ainsi défini est bien compatible avec celle des distributions. i.e. si A_n et B_n converge vers D au sens des distributions et sont tels que leurs variations soit de cauchy alors $v(A_n - B_n)$ converge dans les bons espaces vers 0. Ce fait s'obtient en régularisant les processus puis en utilisant leur convergence distribution vers D.
S'en suit la notion semi-martingale :

définition 9 *Une distribution adaptée est dite semi-martingale si et seulement si pour tout U ouvert du filtre l'on a $E(T_U \mid \mathcal{F}_{U^c})$ à variation finis. Le sous espace $\mathcal{S}$ des distributions adaptés ainsi défini est complet quand il se munis de la topologie dérivée de la précédente : T^n tend vers T si et seulement si T^n converge au sens des distributions vers T avec pour tout U, $E(T^n_U \mid \mathcal{F}_{U^c})$ qui converge en variations finis vers $E(T_U \mid \mathcal{F}_{U^c})$*

La complétude est conséquence directe de la définition précédente et l'on a bien toute semi-martingale L^1_{loc} presque-sûrement est une semi-martingale au sens des distributions :

Si $V_t = M_t + A_t$ l'on a pour tout $t \geq s$, $E(V_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s + E(A_t \mid \mathcal{F}_s)$ Le premier terme est donc constant sur la demi-droite $]s, +\infty[$ famille génératrice des ouverts du filtre, et donc à variation finis. Le second l'est par hypothèse et par indépendance du caractère "variation-finis" vis à vis de la sous-tribu choisis.
Remarquons comme nous allons le prouver par la suite que cette classe est strictement plus grande que celle classique des processus semi-martingales, ce même quand on l'a restreint au seul processus presque-sûrement L^1_{loc}. Cela vient essentiellement du fait que l'opérateur de différentielle de Ito que nous allons définir par la suite se construit par application sur une classe bien plus petite de processus (essentiellement $\mathcal{C}_{ad}$ avec sa topologie et non plus les processus càdlàg munis de la convergence uniforme en probabilité.).
Un point important sur les distributions à variations finis est qu'il est permis d'expliciter le produit de leurs différentielles avec des fonctions $\mathcal{C}^\infty \hat{\otimes} L^\infty$ au moyen de somme de Riemann. c'est l'objet de la proposition suivante.

proposition 6 *Soit T une distribution à variation finis et A_n une suite de processus presque-sûrement L^1_{loc} à variation finis convergeant dans $\mathcal{V}$ vers T alors localement sur E, si x est une coordonnée de $\mathbb{R}^d$ où d est la dimension de E on a :*

$$< \partial_x T, \phi >= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} (\int_{y \in \mathbb{R}^{d-1}} \phi(x_i, y)(A_n(x_{i+1}, y) - A_n(x_i, y))dy).$$

De plus, pour $p \geq 1$ cette convergence est L^p pourvu que la convergence de la suite A_n ait lieu dans $\mathcal{V}L^p$.

Preuve :
Le théorème de Fubini-Tonelli prouve la convergence de

$$\sum_{i=0}^{n} (\int_{y \in \mathbb{R}^{d-1}} \phi(x_i, y)(A_n(x_{i+1}, y) - A_n(x_i, y))dy)$$

En effet, par hypothèse sur le caractère à variation finis de A_n :

$$\sum_{i=0}^{n} \mid \phi(x_i, y)(A_n(x_{i+1}, y) - A_n(x_i, y)) \mid$$

converge pour tout y. On en déduit en passant au reste de Cauchy la convergence de

$$\sum_{i=0}^{n} \phi(x_i, y)(A_n(x_{i+1}, y) - A_n(x_i, y))$$

De plus, si h_n est la régularisé à l'ordre n du processus A_n, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i, y)(A_n(x_{i+1}, y) - A_n(x_i, y)) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i, y)(h_n(x_{i+1}, y) - h_n(x_i, y))$$

Mais à tout n, h_n est différentiable continue, ainsi pour tout p :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \phi(x_i, y)(h_p(x_{i+1}, y) - h_p(x_i, y)) = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \phi(x, y) h_p(x, y) dx$$

Le caractère Cauchy à variation finis des h_n ainsi que le fait que h_n converge en distribution vers T achève la preuve.
Un autre point est le caractère localisable selon l'espace et l'information de telles sommes en effet :

proposition 7 *Soit T une distribution à variation finis de $\mathcal{V}L^1$ et f un processus $\mathcal{C}^\infty\hat{\otimes}L^\infty$ tout deux adaptés alors pour tout processus $\phi \in \mathcal{C}_{ad}$ et tout recouvrement $\{U_i^n\}_{0\leq i\leq p(n)}$ du support de ϕ tendant uniformément vers 0 on a pour toute partition déterministe de l'unité h_i^n adaptée à la suite de recouvrement (i.e. pour tout $(j, n+1)$ il existe un couple (i, n) tel que supp$(h_j^{n+1}) \subset U_i^n$) :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p(n)} < E(f\partial T \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}), h_i^n\phi >=< f\partial T, \phi > .$$

Preuve :
D'après la proposition précédente il suffit de le montrer pour g_m presque-sûrement $\mathcal{C}^\infty$ convergeant dans $\mathcal{V}L^1$ vers T mais dans ce cas $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p(n)} < E(f\partial_x g_m \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}), h_i^n\phi >$ est égal à :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p(n)}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\lim_{k(n)\to\infty}\sum_{j=0}^{k(n)} h_i^n E(\phi(x_j,y) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})E(f(x_j,y)(g_m(x_{j+1},y)-g_m(x_j,y)) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$$

Comme f et g_m sont continue et infiniment différentiable pour tout $(x, y) \in U_i^n$ on a :

$$lim_{n\to+\infty}E(\phi(x_j,y) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})E(f(x_j,y)(g_m(x_{j+1},y)-g_m(x_j,y)) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) = \phi(x_j,y)f(x_j,y)(g_m(x_{j+1},y)-g_m(x_j,y))$$

Le passage au reste de Cauchy leur convergence L^1 et le fait que $supp(h_j^{n+1}) \subset U_i^n$ donnent alors l'identité de la limite précédente avec :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\sum_{i=0}^{n}\phi f(x_i,y)(g_m(x_{i+1},y)-g_m(x_i,y))$$

Où les x_i sont choisis arbitrairement parmis les x_j de telle façon que pour tout i, x_{i+1} et x_i soit dans U_i^n La proposition précédente conclut alors alors la preuve.
Nous allons à présent définir une notion équivalente au crochet pour ce type de semi-martingale.

définition 10 *Soit $\mathcal{S}$ l'espace des semi-martingales adaptées au sens des distributions alors il existe un unique opérateur continue $d(.,.)$ dit opérateur de crochet de $\mathcal{S}$ dans $Hom_{\mathcal{C}^0}(\mathcal{C}^\infty\hat{\otimes}L^\infty_{ad}, \mathcal{D}_{ad})$ qui prolonge ∂ sur $\mathcal{V}L^1$. Cette opérateur est donné par l'identité :*

$$d < T, f >= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$$

Où U_i^n est une suite de recouvrement croissant de E (la famille U_i^n recouvre un compact K_n de E avec $K_n \subset K_{n+1}$ et $\bigcup K_n = E$) de taille tendant uniformément vers 0.
On définit alors la différentielle de Îto de T noté dT par $fdT = f\partial T - d < T, f >$.

Preuve :
Par hypothèse $E(T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$ est à variation finis ainsi si g^m presque-sûrement infiniment différentiable converge dans $\mathcal{D}L^1_{ad}$ vers T, pour tout i et tout n d'après la proposition 4 et la définition de $\mathcal{V}$ $E(g^m_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{U_i^n{}^c})$ converge dans $\mathcal{V}L^1$ vers cet élément. Ainsi, au sens des distributions, l'on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial(g^m)_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) = \sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$$

De plus, D'après les propositions 5 et 6 pour tout $\phi \in \mathcal{C}_{ad}$:

$$< E(f\partial(g^m)_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}), \phi >= \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} (\int_{y\in\mathbb{R}^{d-1}} E(\phi(x_j,y) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) h_n^i E(f(x_j,y)(g^m(x_{j+1},y) - g^m(x_j,y)) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) dy)$$

Enfin les différents processus présent dans la somme sont infiniment différentiable et pour tout i et tout n, $v(E(g^{m+p} - g^m) \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}))$ tends vers 0 pour tout p quand m tends vers l'infini et ainsi les restes de Cauchy en n de la suite

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial(g^m)_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$$

tendent bien vers 0 au sens de $\mathcal{D}L^1_{ad}$. On en déduit la convergence uniforme selon le recouvrement et la partition h_n^i de l'unité associé dans cet espace de

$$\sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$$

Le coté local de cette somme assure la continuité en f de sa limite et si T_n tends vers T dans $\mathcal{S}$ alors $E((h_n^m - h^m)_{U_n^i} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$ où les h_n^m sont les régularisés de T_n tend vers 0 pour tout i et tout n. On en déduit la continuité de l'opérateur d. D'après la proposition 7 on a bien pour tout $T \in \mathcal{V}L^1$, $f\partial T = fdT$. Les distributions à variations finis sont denses dans $\mathcal{D}L^1_{ad}$ ainsi on peut toujours trouver $T_m \in \mathcal{V}L^1$ qui converge dans $\mathcal{D}L^1_{ad}$ vers T pour tout $T \in \mathcal{S}$. Mais alors d'après la proposition 5, pour tout i et tout n, $E(f\partial(T_m)_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$ converge vers $E(f\partial T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$ à n fixé.
Il en est donc de même des sommes associés et l'on en déduit l'unicité comme prolongement de ∂ à l'espace $\mathcal{S}$ pour sa topologie de $d(.,1)$.

Remarque :
L'image de $\mathcal{S}$ par ∂ n'est pas dans $\mathcal{S}$ ainsi, pour $\mathbb{1}_{]T,+\infty[}$ à variation finis les deux différentielles coincident et valent toutes deux δ_T. Il est clair aussi que par définition la différentielle de Îto d'une distribution variation finis est nulle. Cette opérateur peut s'étendre quand on regarde l'adhérence pour une semi-martingale T fixé de l'espace $\mathcal{C}^\infty \hat{\otimes} L^\infty_{ad}$ munis de la topologie associée à la convergence des suites du type $d(T, f_n)$ dans $\mathcal{D}L^1_{ad}$. On retrouve ainsi le crochet pour les processus càdlàg de $L^2(\Omega)$. si T est une martingale $d(T,f)$ peut s'assimiler à la différentielle du drift de l'intégrale au sens des distributions quand elle existe de $f\partial T$. En effet :

proposition 8 *Soit T une distribution semi-martingale alors pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty \hat{\otimes} L^\infty_{ad}$, fdT est martingale.*

Il suffit de montrer que $E((f\partial T - d(T,f))_U \mid \mathcal{F}_{U^c})$ est nul pour tout U de la topologie du filtre. Or, si ϕ est à support dans U pour tout $U_n^i \subset U$ on a $E(\phi \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c})$ $\mathcal{F}_{U^c}$-mesurable et :

$$E(< T, \phi >\mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) \mid \mathcal{F}_{U^c}) = E(< T, \phi >\mid\mid \mathcal{F}_{U^c})$$

On en déduit par partition de l'unité :

$$E((f\partial T)_U \mid \mathcal{F}_{U^c}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{p(n)} E(f\partial T_{U_i^n} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U_i^n}^c}) \mid \mathcal{F}_{U^c})$$

finalement égal à $E(d(T,f)_U \mid \mathcal{F}_{U^c})$.
On en déduit la décomposition pour toute semi-martingale T de sa différentielle au sens des distributions :

$$\partial T = dT + d(T,1)$$

Il s'en suit un résultat équivalent à la proposition 5.

proposition 9 *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ deux filtrations de même topologie alors si $T \in \mathcal{S}_{ad}(\mathcal{G})$ on a $E(T \mid \mathcal{F}) \in \mathcal{S}_{ad}(\mathcal{F})$ et dans ce cas pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty \hat{\otimes} L^\infty_{ad}(\mathcal{F})$:*

$$E(fdT \mid \mathcal{F}) = fdE(T \mid \mathcal{F})$$

En effet si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty \hat{\otimes} L^\infty_{ad}(\mathcal{F})$ alors par continuité de l'opérateur de conditionnement pour les distributions :

$$E(d(T,f) \mid \mathcal{F}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{p(n)} E((f\partial T)_{U^i_n} \mid \mathcal{G}_{\tilde{U^n_i}^c} \mid \mathcal{F}_{\tilde{U^n_i}^c})$$

Soit $E(d(T,f) \mid \mathcal{F}) = d(E(T \mid \mathcal{F}), f)$. La proposition 5 permet de conclure.